Macierz

- macierz o wymiarach 3×2 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$
- wektor kolumnowy $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$
- wektor wierszowy $\mathbf{c}=\begin{pmatrix} 4 & 2 \end{pmatrix}$
- macierz jednostkowa $\mathbf{I}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Podmacierze

- jeżeli $d = (-1)$, $\mathbf{e} = (2)$, $\mathbf{f} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ oraz $\mathbf{g} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, to $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} d & \mathbf{e} \\ \mathbf{f} & \mathbf{g} \end{pmatrix}$

Transponowanie

- $\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$
- $\mathbf{c}' = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

Dodawanie i odejmowanie

- $\mathbf{A}+\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 2 & 4 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$
- $\mathbf{f}+\mathbf{g} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$
- $\mathbf{c}-\mathbf{f}' = \begin{pmatrix} 3 & 2 \end{pmatrix}$

Mnożenie

- $(-1)A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & -2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$
- $\mathbf{f}'\mathbf{g} = (2)$
- $\mathbf{f}\mathbf{g}' = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
- $((-1)\mathbf{A})'\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -13 \end{pmatrix}$

Macierz odwrotna

- macierz odwrotna do $\mathbf{A}$, oznaczona jako $\mathbf{A}^{-1}$, to macierz, która spełnia równanie $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$
- dla równania $\mathbf{Ax=b}$, $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$

Ogólny model mieszany

$\mathbf{y} = \mathbf{X}\mathbf{b} + \mathbf{Z}\mathbf{u} + \mathbf{e}$

gdzie $\mathbf{u} \sim (0, \mathbf{G})$, $\mathbf{e} \sim (0, \mathbf{R})$, co oznacza, że $\mathbf{y} \sim (\mathbf{X}\mathbf{b}, \mathbf{V}) = (\mathbf{X}\mathbf{b}, \mathbf{Z}\mathbf{G}\mathbf{Z}' + \mathbf{R})$

BLUP, BLUE

- Best - zapewnia najmniejszą $E(\mathbf{u} - \widehat{\mathbf{u}})^2$
- Linear - z konieczności zakładamy, że zależność między predyktorami a obserwacjami jest liniowa
- Unbiased - $E(\widehat{\mathbf{u}}) = \mathbf{u}$
- Prediction (predictor) - predykcja (predyktor), inaczej ocena efektów losowych
  Estimation (estimate) - szacowanie (estymator), inaczej ocena efektów stałych

---

BLUE i BLUP przed Hendersonem

- $\widehat{\mathbf{b}} = (\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{y}$
- $\widehat{\mathbf{u}} = \mathbf{G}\mathbf{Z}'\mathbf{V}^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{X}\widehat{\mathbf{b}})$

Równania modelu mieszanego (Henderson 1950, 1963)

$$\begin{pmatrix} \mathbf{X}'\mathbf{R}^{-1}\mathbf{X} & \mathbf{X}'\mathbf{R}^{-1}\mathbf{Z} \\ \mathbf{Z}'\mathbf{R}^{-1}\mathbf{X} & \mathbf{Z}'\mathbf{R}^{-1}\mathbf{Z} + \mathbf{G}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widehat{\mathbf{b}} \\ \widehat{\mathbf{u}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{X}'\mathbf{R}^{-1}\mathbf{y} \\ \mathbf{Z}'\mathbf{R}^{-1}\mathbf{y} \end{pmatrix}$$

Animal Model (AM)

- $\mathbf{u}$ to wektor efektów osobniczych, $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_k \end{pmatrix}$
- $\mathbf{G} = \sigma_A^2 \mathbf{A}$

BLUP(E) dla modelu zwierzęcia, przy $\mathbf{R} = \sigma_E^2 \mathbf{I}$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{X}'\mathbf{X} & \mathbf{X}'\mathbf{Z} \\ \mathbf{Z}'\mathbf{X} & \mathbf{Z}'\mathbf{Z} + \lambda \mathbf{A}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widehat{\mathbf{b}} \\ \widehat{\mathbf{u}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{X}'\mathbf{y} \\ \mathbf{Z}'\mathbf{y} \end{pmatrix}$$

$\lambda = \frac{\sigma_E^2}{\sigma_A^2} = \frac{1-h^2}{h^2}$

BLUP-AM przykład

- rodowód:

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & & & & 2 & & & & 3 \\ & \searrow & & \swarrow & & \searrow & & \swarrow & \\ & & 4 & & & & 5 & & \end{array}$$

- obserwacje:

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ 10 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}$$

- model:

$$y_i = \mu + a_i + e_i$$

$$h^2 = 0.5$$

- z rodowodu:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 1 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 1/4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 3/2 & 1/2 & 0 & -1 & 0 \\ 1/2 & 2 & 1/2 & -1 & -1 \\ 0 & 1/2 & 3/2 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- wektor rozwiązań: $\begin{pmatrix} \widehat{\mu} \\ \widehat{a}_1 \\ \widehat{a}_2 \\ \widehat{a}_3 \\ \widehat{a}_4 \\ \widehat{a}_5 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 8.302 \\ -0.961 \\ 0.076 \\ 0.885 \\ -1.062 \\ 0.553 \end{pmatrix}$

Octave - przykład

Układ równań $\begin{array}{c} 2x+5y=12 \\ 3x-2y=-1 \end{array}$ można rozwiązać w następujący sposób:

```
C = [2 5; 3 -2]

rhs = [12 -1]'

x = inv(C) * rhs
```

Zadania

1. Oblicz wyrażenie $(3\mathbf{A}')'$.
2. Sprawdź czy $\mathbf{AI} = \mathbf{A}$.
3. Dane są macierze $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ oraz $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \end{pmatrix}$. Udowodnij, że $\mathbf{D} = \mathbf{B}^{-1}$.
4. Dany jest wektor obserwacji $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Oblicz sumę kwadratów.
5. Obserwacje (zadanie 4) zebrano w dwóch stadach, przy czym dwie pierwsze oberwacje pochodziły ze stada pierwszego. Efekt wspólny oraz nieznane efekty stad przedstawiono w wektorze $\mathbf{h}' = \begin{pmatrix} \mu & h_1 & h_2 \end{pmatrix}$. Efekt stad będzie weryfikowany w modelu $\mathbf{y{=}Xh{+}e}$, gdzie $\mathbf{e}$ jest wektorem reszt losowych. Zdefiniuj macierz **X,** złożoną z zer i jedynek, która przyporządkowuje obserwacje poszczególnym stadom.
6. Rozważ przykład BLUP - Animal Model ponownie przyjmując, że cecha jest ograniczona do płci, przy czym tylko samice mają obserwacje. Przyjmij, że osobniki 1 oraz 3 to buhaje. Krowy 2, 4 i 5 mają wydajność białka 350, 330 i 310 kg ($h^2 = 0,4$), a tłuszczu 420, 450 i 490 kg ($h^2 = 0,3$). Oblicz wartość hodowlaną wszystkich zwierząt względem dwóch cech osobno, oraz oblicz dla buhajów indeks: 2×białko+tłuszcz.